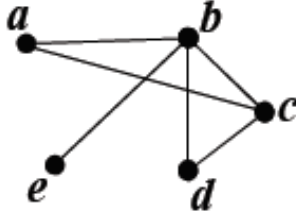


ساده نهایی ۱۳۹۹

بارم: ۱



①

گراف G به صورت مقابل را در نظر بگیرید.الف) درجه راس e در گراف مکمل G چند است؟ب) تمام دورهای موجود در گراف G را بنویسید.پ) $\Delta(G)$ را مشخص کنید.متوسط تشریحی ۱۳۹۸

بارم: ۱

②

در گرافی با اندازه ۲۴، مجموع درجات رئوس زوج برابر ۳۲ است. اگر رئوس فرد همگی هم‌درجه باشند، آنگاه تعداد آنها کدام می‌تواند باشد؟

متوسط نهایی ۱۴۰۱

بارم: ۱

③

جاهای خالی را با عدد یا کلمه مناسب پر کنید.

الف) اگر درجه یک راس فرد باشد، آن را رأس می‌نامیم.

ب) گرافی را که تمام رئوس آن تنها باشد، هیچ یالی نداشته باشد، گراف می‌نامیم.

ت) تعداد یال‌های گراف K_n ، برابر است است.ث) گراف G را می‌نامیم هر گاه بین هر دو راس آن حداقل یک مسیر وجود داشته باشد.متوسط تشریحی ۱۳۹۹

بارم: ۱

④

گرافی ساده از مرتبه ۸ و اندازه ۱۱، فقط دارای رئوسی از درجه‌های ۲، ۳ و ۴ است. اگر تعداد رأس‌های درجه ۲ در این گراف، دو واحد بیشتر از تعداد رأس‌های درجه ۴ باشد، آنگاه این گراف چند رأس از درجه ۳ دارد؟

متوسط تشریحی ۱۳۹۷

بارم: ۱

⑤

در گرافی از مرتبه ۹ و اندازه ۳۲، چند مقدار متمایز می‌تواند داشته باشد؟

متوسط تشریحی ۱۳۹۹

بارم: ۱

⑥

حاصل ضرب درجات رئوس گراف G از مرتبه ۶، برابر ۴۸۰ است. گراف \bar{G} چند یال دارد؟دشوار تشریحی ۱۳۹۳

بارم: ۱

⑦

اگر a, p حداقل تعداد یال‌هایی باشد که از گراف کامل K_p بر می‌داریم تا تبدیل به گرافی منتظم و ناهمبند شود، آنگاه حاصل $a_9 - a_{10}$ کدام است؟

دشوار تشریحی ۱۳۹۹

بارم: ۱

⑧

در گراف ساده G با مجموعه رئوس $V = \{a, b, c, d, e\}$ ، $N_G(a) = \{c\}$ ، $N_G(b) = \{e\}$ ، $N_G(d) = \emptyset$ است و دو رأس c و e مجاور یکدیگرند. در گراف \bar{G} ، چند مسیر از رأس a به رأس c وجود دارد؟

دشوار تشریحی ۱۳۹۹

بارم: ۱

⑨

با حذف ۲۴ یال از گراف کامل K_p ، گراف G حاصل شده است. اگر گراف \bar{G} ، ۴-منتظم باشد، آنگاه $\Delta(G)$ کدام است؟

۱۰

آیا گراف γ رأسی ۳- منتظم وجود دارد؟ برای پاسخ خود دلیل ارائه کنید.

بارم: ۱

متوسط نهایی ۱۳۹۹

۱۱

اگر مکمل گراف P_n دارای ۱۵ یال باشد، آنگاه $\delta(\overline{P}_n)$ کدام است؟

بارم: ۱

متوسط تشریحی ۱۳۹۹

۱۲

با افزودن چند یال به گراف P_7 ، گراف کامل مرتبه ۷ حاصل می شود؟

بارم: ۱

متوسط تشریحی ۱۳۹۷

۱۳

گراف G با مجموعه رأس‌های $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ مفروض است. دو رأس a و b در این گراف مجاورند اگر و تنها اگر $a + b \equiv 3 \pmod 8$ باشد. $N_G[1]$ چند عضو دارد؟

بارم: ۱

ساده تشریحی ۱۳۹۹

۱۴

گراف C_4 چند زیرگراف ۱- منتظم دارد؟

بارم: ۱

دشوار تشریحی ۱۳۹۹

۱۵

گراف ساده و ناهمبند G از مرتبه ۱۲ مفروض است. اگر $\delta(G) = 3$ و گراف G دارای حداکثر اندازه ممکن باشد، اندازه گراف \overline{G} بارم: ۱

متوسط تشریحی ۱۴۰۰

۱۶

اگر $V(G) = \{a, b, c, d, e, f\}$ ، $N_G(a) = \{b, d, f\}$ و $N_G(d) = \{a, c, e, f\}$ باشد، یال ad با چند یال در گراف G مجاور است؟

بارم: ۱

ساده تشریحی ۱۳۹۹

۱۷

گرافی ساده از مرتبه ۸، دارای ۱۷ یال است. این گراف حداکثر چند رأس از درجه ۱ می‌تواند داشته باشد؟

بارم: ۱

ساده تشریحی ۱۳۹۵

۱۸

چند گراف ساده با ۵ رأس و ۴ یال می‌توان رسم کرد که از دو «بخش جدا از هم» تشکیل شده باشد؟

بارم: ۱

دشوار تشریحی ۱۳۹۳

۱۹

در یک گراف ساده، $p = 6$ و $q = 4$ است. این گراف حداکثر چند رأس از درجه ۱ می‌تواند داشته باشد؟

بارم: ۱

متوسط تشریحی ۱۳۹۹

۲۰

گراف K_4 دارای چند زیرگراف با اندازه ۲ است؟

بارم: ۱

دشوار تشریحی ۱۳۹۸

۲۱

مرتبه و اندازه گراف G به ترتیب برابر ۸ و ۱۶ است. اختلاف بین مرتبه و اندازه گراف \overline{G} کدام است؟

بارم: ۱

متوسط تشریحی ۱۳۹۹

۲۲

حداکثر تعداد یال‌های یک گراف k - منتظم غیرکامل از مرتبه γ کدام است؟

بارم: ۱

دشوار تشریحی ۱۳۹۹

۲۳

تشریحی قلم‌چی ۱۳۹۸

ساده

با توجه به نمودار گراف G به پرسش‌های زیر پاسخ دهید.

(آ) مجموعه‌های $V(G)$ و $E(G)$ را بنویسید.

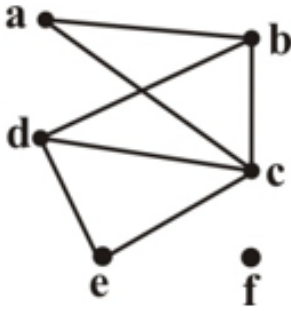
(ب) مقدار $d_G(a)$ را تعیین کنید.

(پ) مجموعه $N_G[d]$ را بنویسید.

(ت) همه e - b مسیرهای به طول ۳ را تعیین کنید.

(ث) همه دورهای به طول ۴ را بنویسید.

بارم: ۲.۵



۲۴

تشریحی ۱۳۹۸

متوسط

تعداد کل مسیرها در یک گراف ۲-منتظم همبند از مرتبه n کدام است؟

بارم: ۱

۲۵

تشریحی ۱۳۹۵

ساده

در گراف ۳-منتظم، اندازه گراف از ۵ برابر مرتبه n واحد کمتر است. مجموع مرتبه و اندازه n گراف کدام است؟

بارم: ۱

۲۶

تشریحی ۱۳۹۹

متوسط

مجموعه رأس‌های گراف G به صورت $V = \{a, b, c, d\}$ است. اگر $N_G[a] \cap N_G[b] = \{a, b\}$ و $N_G[a] \cap N_G[c] = \{a, c, d\}$ باشد، آنگاه $N_G[b] \cap N_G[d]$ کدام است؟

بارم: ۱

۲۷

تشریحی ۱۳۹۵

متوسط

چند گراف ساده از مرتبه ۴ وجود دارد؟

بارم: ۱

۲۸

تشریحی ۱۳۹۹

دشواری

اگر G یک گراف ۳-منتظم از مرتبه ۱۲ باشد، گراف \bar{G} چگونه است؟

بارم: ۱

۲۹

تشریحی ۱۳۹۷

متوسط

در گراف K_6 که در آن $V = \{a, b, c, d, e, f\}$ است، چند مسیر از رأس a به رأس b وجود دارد که رأس e عضوی از آن مسیر نباشد؟

بارم: ۱

۳۰

تشریحی ۱۳۹۸

متوسط

اگر G یک گراف ۲-منتظم از مرتبه p و تعداد یال‌های \bar{G} ، ۳ واحد بیشتر از تعداد یال‌های G باشد، آنگاه p کدام است؟

بارم: ۱

۳۱

تشریحی ۱۳۹۸

متوسط

اندازه گراف ۲-منتظم از مرتبه p برابر ۱۶ است. چند مقدار زوج برای n وجود دارد؟

بارم: ۱

۳۲

تشریحی ۱۳۹۸

دشواری

گراف K_6 با رأس‌های a, b, c, d چند زیرگراف مانند G دارد که در آنها تعداد یال‌های G از \bar{G} کمتر باشد؟

بارم: ۱

۳۳

تشریحی ۱۳۹۸

متوسط

اگر در گرافی از مرتبه ۷ و اندازه ۹، $\Delta = \delta + 1$ باشد، آنگاه δ کدام است؟

بارم: ۱

۳۴

تشریحی ۱۳۹۸

متوسط

حداقل اندازه یک گراف ۴-منتظم ناهمبند کدام است؟

بارم: ۱

۳۵

تشریحی ۱۳۹۶

متوسط

گراف G از مرتبه ۷ همبند بوده و با حذف یک یال ناهمبند می‌شود. بیشترین اندازه برای G کدام است؟

بارم: ۱

۳۶

در گراف G از مرتبه ۱۰، $\Delta = 9$ است. حداکثر درجه در گراف \bar{G} کدام می‌تواند باشد؟

تشریحی ۱۳۹۹ ساده

بارم: ۱

۳۷

به (الف) پاسخ کوتاه دهید و (ب) را تعریف کنید.

نهایی ۱۴۰۰ ساده

بارم: ۱

(الف) گرافی را که درجه تمام رئوس آن با هم مساوی باشند، چه می‌نامیم؟

(ب) گراف همبند را تعریف کنید.

۳۸

اگر G_1 و G_2 گراف‌هایی غیرتهی و به ترتیب $k_1 -$ منتظم از مرتبه ۷ و $k_2 -$ منتظم از مرتبه ۸ بوده و k_1 و k_2 کمترین مقدار ممکن را داشته باشند، آنگاه $q(G_1) - q(G_2)$ کدام است؟

تشریحی ۱۳۹۹ متوسط

بارم: ۱

۳۹

گرافی با ۷ رأس دارای ۱۸ یال است. حداقل δ کدام است؟

تشریحی ۱۳۹۵ ساده

بارم: ۱

۴۰

گراف P_5 را رسم کرده و تمام مسیرهای به طول ۳ را مشخص کنید.

نهایی ۱۳۹۹ ساده

بارم: ۱

۴۱

(الف) گراف k -منتظم را تعریف کنید.

(ب) گراف P_7 را رسم کنید.

(پ) آیا گراف C_n منتظم هستند؟

نهایی ۱۳۹۹ متوسط

بارم: ۱

۴۲

(الف) یک گراف ۶ رأسی که $\gamma -$ مجموعه آن با اندازه یک باشد، رسم کنید.

(ب) یک گراف ۶ رأسی که $\gamma -$ مجموعه آن با اندازه دو باشد، رسم کنید.

نهایی ۱۴۰۰ متوسط

بارم: ۱

۴۳

اگر A ماتریس مجاورت گراف از G مرتبه ۵ و حاصل ضرب درایه‌های قطر اصلی A^2 برابر ۷۲ باشد گراف G حداکثر دارای چند دور به طول ۴ است؟

تشریحی ۱۳۹۳ دشوار

بارم: ۱

۴۴

در گراف G از مرتبه ۱۰، بین هر دو رأس غیرمجاور دقیقاً یک مسیر به طول ۲ وجود دارد. عدد احاطه‌گری گراف G کدام است؟

تشریحی ۱۳۹۹ دشوار

بارم: ۱

۴۵

جاهای خالی را با کلمات مناسب پر کنید.

(الف) مرتبه گراف نشان دهندهٔ تعداد گراف می‌باشد.

(ب) اگر یک یال، یک رأس را به خود آن رأس وصل کند، این یال را می‌نامیم.

(پ) دو یال را می‌نامیم هر گاه رأس وجود داشته باشد که هر دوی آن‌ها را به هم متصل کند

(ت) تعداد راس‌های فرد هر گراف عددی است.

نهایی ۱۳۹۹ ساده

بارم: ۱

(۴۶)

تشریحی قلمچی ۱۳۹۸

متوسط

- آ) گرافی معرفی کنید که عدد احاطه گری آن برابر $\left\lceil \frac{n}{\Delta+1} \right\rceil$ باشد. (n مجموع تعداد رأس ها می باشد). بارم: ۲.۵
- ب) گرافی معرفی کنید که عدد احاطه گری آن برابر $\left\lfloor \frac{n}{\Delta+1} \right\rfloor$ نباشد. (n مجموع تعداد رأس ها می باشد).
- پ) نشان دهید که در یک گراف، هر مجموعه احاطه گر دلخواه غیر مینیمال را می توان با حذف برخی رئوسش، تبدیل به یک مجموعه احاطه گر مینیمال کرد. (همراه با استدلال)
- ت) گرافی ۸ رأسی با عدد احاطه گری ۲ رسم کنید که یک مجموعه احاطه گر یکتا با اندازه ۲ داشته باشد.

(۴۷)

تشریحی ۱۳۹۹

متوسط

- گراف کامل K_p دارای ۲۰ مجموعه احاطه گر ۳ عضوی است. این گراف چند مجموعه احاطه گر مینیمال دارد؟ بارم: ۱

(۴۸)

تشریحی ۱۳۹۹

ساده

- تعداد مسیرهای به طول غیرصفر در گراف P_n برابر ۲۸ است. عدد احاطه گری گراف P_{n+3} کدام است؟ بارم: ۱

(۴۹)

تشریحی ۱۳۹۹

دشوار

- گراف K_4 چند مجموعه احاطه گر دارد؟ بارم: ۱

(۵۰)

نهایی ۱۴۰۱

ساده

- به سؤالات زیر پاسخ دهید:
- الف) گراف C_8 را رسم کنید.
- ب) یک γ -مجموعه از آن مشخص کنید.
- پ) یک مجموعه احاطه گر مینیمال ۴-عضوی از آن را مشخص کنید.

(۵۱)

تشریحی ۱۳۹۸

متوسط

- یک گراف ۴-منتظم از مرتبه ۶، چند مجموعه احاطه گر مینیمال دارد؟ بارم: ۱

(۵۲)

تشریحی ۱۳۹۹

متوسط

- عدد احاطه گری گراف C_n با اضافه کردن حداقل ۱۱ یال می تواند برابر یک شود. مرتبه این گراف کدام است؟ بارم: ۱

(۵۳)

تشریحی ۱۳۹۹

دشوار

- در گراف G با مجموعه رئوس $\{a, b, c, d, e, f, g, h\}$ ، $N_G(a) = \{d, f\}$ ، $N_G(b) = \{c, e\}$ ، $N_G(c) = \{b, h\}$ ، $N_G(d) = \{g, e, c\}$ است. اگر هیچ دو رأسی از میان رأس های e, d, f مجاور یکدیگر نباشند، عدد احاطه گری گراف \bar{G} کدام است؟ بارم: ۱

(۵۴)

تشریحی ۱۳۹۷

متوسط

- اگر G گرافی از مرتبه p باشد به طوری که $p \geq 6$ و $\delta = 2$ ، آنگاه عدد احاطه گری گراف \bar{G} کدام است؟ بارم: ۱

(۵۵)

تشریحی ۱۳۹۸

متوسط

- حداقل مقدار عدد احاطه گری یک گراف ۳-منتظم از مرتبه p و اندازه ۱۵ کدام است؟ بارم: ۱

۵۶

گراف G (شکل مقابل) را در نظر بگیرید:

الف) $\Delta(G)$ و $\delta(G)$ را مشخص کنید.

ب) دوری به طول ۴ بنویسید.

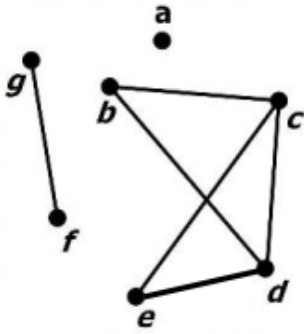
پ) دو مسیر به طول ۳ با شروع از راس b بنویسید.

ت) $N_G(f)$ را با اعضا مشخص کنید.

ساده

نهایی ۱۴۰۱

بارم: ۱



۵۷

نمودار مقابل مربوط به گراف $G(V,E)$ است:

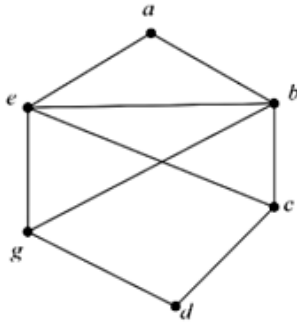
الف) کدام یال‌ها را از گراف حذف کنیم تا گراف دو-منتظم حاصل شود.

ب) یک مسیر $e-d$ به طول ۳ بنویسید:

متوسط

نهایی ۱۴۰۰

بارم: ۱



۵۸

گراف G از مرتبه $p = ۸$ و ۳ -منتظم است.

الف) یک کران پایین برای $\gamma(G)$ پیدا کنید.

ب) گراف G را طوری رسم کنید که عدد احاطه‌گری آن $\gamma(G) = ۳$ باشد.

متوسط

تشریحی قلم‌چی ۱۳۹۷

بارم: ۱.۵

۵۹

در هر مورد، عبارت صحیح را از داخل پرانتز انتخاب کنید.

الف) تعداد رئوس یک گراف را (اندازه، مرتبه) می‌نامیم.

ب) گرافی را همبند می‌نامیم که بین هر دو راس آن یک (مسیر، یال) وجود داشته باشد.

پ) اگر G یک گراف n رأسی باشد، مقدار $q(G) + q(\bar{G})$ برابر با $n(n-1)$ ، $\binom{n(n-1)}{۲}$ است.

ت) گراف C_n تنها یک (دور، مسیر) n رأسی دارد.

ساده

نهایی ۱۴۰۱

بارم: ۱

۶۰

اگر گراف G از مرتبه ۱۸ و $\delta(G) = ۱۳$ باشد، آن‌گاه گراف \bar{G} را با کم‌تر از کدام تعداد رأس نمی‌توان احاطه کرد؟

متوسط

تشریحی ۱۳۹۹

بارم: ۱

۶۱

شکل مقابل نمودار گراف G می‌باشد.

الف) مرتبه و اندازه‌ی گراف G را بنویسید.

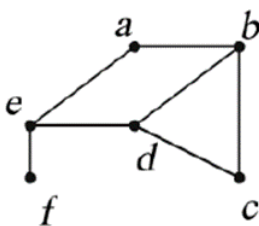
ب) مجموعه‌ی $N_G(b)$ را بنویسید.

ج) مجموع درجه‌های رأس‌های گراف \bar{G} را مشخص کنید.

متوسط

نهایی ۱۴۰۰

بارم: ۱



۶۲

تشریحی ۱۳۹۸ ساده

در یک گراف از مرتبه ۸ که دارای یک γ -مجموعه با اندازه یک باشد، حداکثر تعداد اعضای یک مجموعه احاطه‌گر مینیمال بارم: ۱ کدام است؟

۶۳

تشریحی ۱۳۹۹ دشوار

عدد احاطه‌گری گرافی از مرتبه ۷، برابر ۲ است. این گراف حداکثر چند یال دارد؟ بارم: ۱

۶۴

تشریحی قلم‌چی ۱۳۹۸ متوسط

اگر برای گراف G از مرتبه p داشته باشیم $\gamma(G) = 1$ ، آن گاه $\Delta(G)$ را تعیین کنید و به ازای $p = 7$ ، گراف G با حداقل تعداد یال بارم: ۱ را رسم کنید. (برای رسم چنین گرافی دلیل بیاورید.)

۶۵

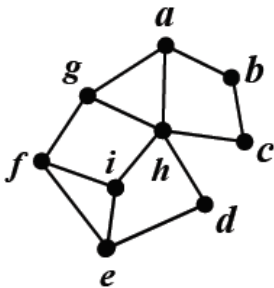
تشریحی ۱۳۹۸ متوسط

گراف P_8 چند مجموعه احاطه‌گر مینیمم دارد؟ بارم: ۱

۶۶

نهایی ۱۴۰۱ ساده

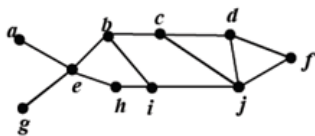
الف) مجموعه احاطه‌گر مینیمال را تعریف کنید.
ب) برای گراف شکل روبه رو، یک مجموعه احاطه‌گر با ۴ عضو انتخاب کنید.



۶۷

نهایی ۱۴۰۰ متوسط

عدد احاطه‌گری گراف شکل زیر را با ارائه راه حل، تعیین کنید. بارم: ۱



۶۸

تشریحی ۱۳۹۸ دشوار

در گراف G ، $V = \{a, b, c, d, e, f\}$ ، $N_G(a) = N_G(b) = N_G(c)$ و $N_G(d) = N_G(e) = N_G(f)$ است. اگر G یک گراف تهی نباشد، بارم: ۱ چند γ -مجموعه دارد؟

۶۹

تشریحی ۱۳۹۹ ساده

یک گراف ۲-منتظم ناهمبند از مرتبه ۷، چند مجموعه احاطه‌گر مینیمم دارد؟ بارم: ۱

۷۰

تشریحی ۱۳۹۹ ساده

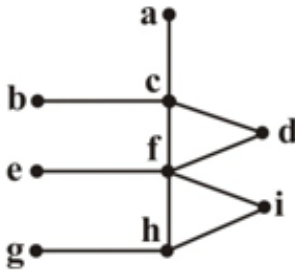
بزرگ‌ترین عدد احاطه‌گری ممکن برای یک گراف ۲-منتظم از مرتبه ۱۲ کدام است؟ بارم: ۱

۷۱

تشریحی ۱۳۹۹ دشوار

گراف K_7 چند مجموعه احاطه‌گر مینیمال دو عضوی دارد؟ بارم: ۱

بارم: ۲.۵



با توجه به گراف روبه رو به سوالات زیر پاسخ دهید.

(آ) برای این گراف یک مجموعه احاطه گر مینیمال ۵ عضوی بنویسید. (دلیل بیاورید).

(ب) در گراف داده شده یک مجموعه احاطه گر مینیمم بنویسید. (دلیل بیاورید).

(پ) آیا این گراف دارای γ - مجموعه یکتا است؟ چرا؟

بارم: ۱

در جاهای خالی عبارت‌های مناسب بنویسید.

(الف) حاصل (m^5, m^2, m) برابر است با است.

(ب) اگر برای دو عدد صحیح و ناصفر a و b داشته باشیم $(a, b) = 1$ ، می‌گوییم a و b هستند.

(پ) یک مجموعه احاطه‌گر را که با حذف هر یک از راس‌هایش دیگر احاطه‌گر نباشد، احاطه‌گر می‌نامیم.

(ت) تعداد یال‌های گراف k_v برابر است.

گزینه درست: null

سوال ۱

(الف) ۳

(ب) b, d, c, b , a, b, c, a , a, b, d, c, a

(پ) ۴

گزینه درست: null

سوال ۲

مجموع درجات رئوس یک گراف، دو برابر اندازه آن گراف است. اگر مجموع درجات رئوس گراف را به صورت مجموع درجات رئوس زوج و مجموع درجات رئوس فرد بنویسیم، آنگاه داریم:

$$48 = 32 + x \Rightarrow x = 16$$

در نتیجه تنها حالت ممکن آن است که گراف ۱۶ رأس درجه یک داشته باشد. (عدد ۱۶ به هیچ عدد فرد دیگری بخش‌پذیر نیست.)

گزینه درست: null

سوال ۳

(الف) فرد

(ب) تهی

(پ) ۶

(ت) همبند

گزینه درست: null

سوال ۴

فرض کنید تعداد رأس‌های درجه ۳ و ۴ در این گراف به ترتیب برابر x و y باشد. در این صورت تعداد رأس‌های درجه ۲ برابر $y + 2$ است و داریم:

$$p = 8 \Rightarrow x + y + y + 2 = 8 \Rightarrow x + 2y = 6$$

$$2q = 22 \Rightarrow 3x + 4y + 2(y + 2) = 22$$

$$\Rightarrow 3x + 6y = 18 \Rightarrow x + 2y = 6$$

با توجه به اینکه تعداد رأس‌های فرد یک گراف همواره عددی زوج است، پس مقدار x یعنی تعداد رأس‌های درجه ۳ برابر ۲ یا ۴ است.

سوال ۵

گزینه درست: null

می‌توانیم این گراف را گراف کامل (K_9) در نظر بگیریم که ۴ یال آن را برداشته‌ایم. در گراف K_9 درجه تمام رئوس برابر ۸ است. اگر این ۴ یال را از یک رأس برداریم، حداقل مقدار δ به دست می‌آید که برابر با $8 - 4 = 4$ است. اما اگر این ۴ یال را از ۸ رأس مختلف برداریم، حداکثر مقدار δ به دست می‌آید که برابر $7 = 8 - 1$ است. پس δ مقادیر ۷، ۶، ۵ و ۴ را می‌تواند داشته باشد.

سوال ۶

گزینه درست: null

با توجه به اینکه $480 = 2^5 \times 3 \times 5 = 2^5 \times 3 \times 5$ است، پس تنها حالت ممکن برای درجات رئوس گراف G به صورت ۲، ۲، ۲، ۳، ۴ و ۵ است (گرافی با درجات رئوس ۱، ۲، ۳، ۴، ۴ و ۵ وجود ندارد چون تعداد رئوس فرد گراف همواره عددی زوج است). بنابراین داریم:

$$2q = 5 + 4 + 3 + 2 + 2 + 2 = 18 \Rightarrow q = 9$$

$$q(G) + q(\bar{G}) = \frac{p(p-1)}{2} \Rightarrow 9 + q(\bar{G}) = \frac{6 \times 5}{2} \Rightarrow q(\bar{G}) = 6$$

سوال ۷

گزینه درست: null

بیش‌ترین اندازه در بین گراف‌های منتظم و ناهمبند از مرتبه‌ی ۱۰، مربوط به گراف ۴-منتظم است. در این حالت داریم:

$$K_{10} \text{ تعداد یال‌های } = \frac{10 \times 9}{2} = 45$$

$$10 \text{ تعداد یال‌های گراف ۴-منتظم مرتبه‌ی } = \frac{10 \times 4}{2} = 20$$

پس لازم است حداقل ۲۵ یال از گراف K_{10} حذف کنیم تا به یک گراف منتظم و ناهمبند تبدیل شود. اما بیش‌ترین اندازه در بین گراف‌های منتظم و ناهمبند از مرتبه‌ی ۹، مربوط به گراف ۲-منتظم است. (گراف ۴-منتظم از مرتبه‌ی ۹، همبند است و گراف ۳-منتظم از مرتبه‌ی ۹ وجود ندارد.)

$$\text{در این حالت داریم: } K_9 \text{ تعداد یال‌های } = \frac{9 \times 8}{2} = 36$$

$$9 \text{ تعداد یال‌های گراف ۲-منتظم مرتبه‌ی } = \frac{9 \times 2}{2} = 9$$

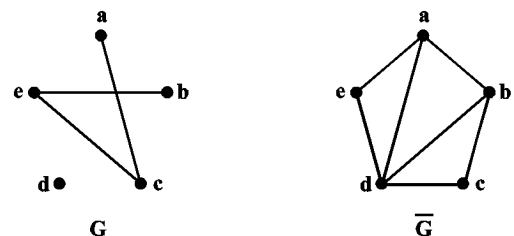
پس لازم است حداقل ۲۷ یال از گراف K_9 حذف کنیم تا به یک گراف منتظم و ناهمبند تبدیل شود.

$$a_{10} - a_9 = 25 - 27 = -2$$

سوال ۸

گزینه درست: null

با توجه به تعریف ارائه شده در صورت سؤال، گراف G و مکمل آن به صورت زیر هستند:



مسیرهای موجود از رأس a به رأس c در گراف G عبارتند از:

$$abc, abdc, adc, adbc, aedc, aedbc$$

سوال ۹

گزینه درست: null

با توجه به اینکه مکمل گراف K_p ، گراف تهی است، پس گراف \bar{G} دارای ۲۴ یال است و در نتیجه برای این گراف داریم: (r درجه هر رأس این گراف است.)

$$2q = pr \Rightarrow 48 = p \times 4 \Rightarrow p = 12$$

(گراف است.)

از طرفی اگر a رأس دلخواهی از گراف G باشد، آن‌گاه: $d_G(a) + d_{\bar{G}}(a) = p - 1 \Rightarrow d_G(a) + 4 = 12 - 1 \Rightarrow d_G(a) = 7$

یعنی درجه هر رأس گراف G برابر ۷ است (گراف G ، ۷-منتظم است) و در نتیجه ماکزیمم درجه در این گراف نیز برابر ۷ است.

سوال ۱۰

گزینه درست: null

وجود ندارد. زیرا: زوج $2q = 21$ فرد $\Rightarrow 3 \times 7 = 2q \Rightarrow \sum_{i=1}^n \deg v_i = 2q$

سوال ۱۱

گزینه درست: null

گراف P_n تنها از یک مسیر n رأسی تشکیل شده و در نتیجه دارای $n-1$ یال است. بنابراین داریم:

$$q(\bar{P}_n) = \frac{n(n-1)}{2} - (n-1) = \frac{(n-1)(n-2)}{2} = 15$$

$$\Rightarrow (n-1)(n-2) = 30 = 6 \times 5$$

$$\Rightarrow n-1 = 6 \Rightarrow n = 7$$

گراف P_n فقط شامل رأس‌هایی از درجه‌های ۱ و ۲ است، پس $\Delta(P_n) = 2$ است. فرض کنید a رأسی از درجه Δ در گراف P_n باشد. در این صورت این رأس در گراف \bar{P}_n دارای کوچک‌ترین درجه خواهد بود. از طرفی مجموع درجات یک رأس در یک گراف مرتبه n و مکمل آن، برابر $n-1$ است، بنابراین داریم:

$$d_{P_n}(a) + d_{\bar{P}_n}(a) = 7 - 1 \Rightarrow 2 + d_{\bar{P}_n}(a) = 6$$

$$\Rightarrow d_{\bar{P}_n}(a) = \delta(\bar{P}_n) = 4$$

سوال ۱۲

گزینه درست: null

تعداد یال‌های گراف P_n ، برابر $n-1$ است، پس مطابق شکل زیر، گراف P_7 دارای ۶ یال است.



تعداد یال‌های گراف K_7 ، برابر $\frac{7 \times 6}{2} = 21$ است، بنابراین باید $15 - 6 = 9$ یال به این گراف اضافه کرد تا به گراف کامل تبدیل شود.

سوال ۱۳

گزینه درست: null

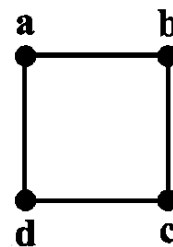
فرض کنید رأس x با رأس ۱ مجاور باشد. در این صورت داریم:

$$1 + x \equiv 0 \pmod{7} \Rightarrow x \equiv -1 \pmod{7} \xrightarrow{x \in V} x = 2, 5, 8$$

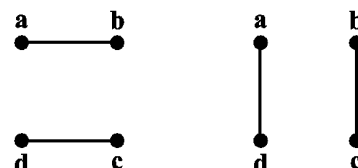
از طرفی مجموعه همسایگی بسته هر رأس، شامل خود آن رأس نیز می‌شود، بنابراین داریم:

$$N_G[1] = \{1, 2, 5, 8\}$$

گراف C_4 مطابق شکل مقابل است:



هر یال گراف، یک زیرگراف ۱- منتظم محسوب می‌شود، پس گراف C_4 دارای ۴ زیرگراف ۱- منتظم از مرتبه ۲ است. همچنین مطابق شکل زیر، گراف C_4 دو زیرگراف ۱- منتظم از مرتبه ۴ دارد.



بنابراین گراف C_4 در مجموع دارای ۶ زیرگراف ۱- منتظم است.

گراف ناهمبند G در صورتی دارای حداکثر اندازه ممکن است که از دو بخش جدا از هم تشکیل شده باشد. با توجه به اینکه مینیمم درجه در گراف G برابر ۳ است، حداکثر اندازه در صورتی امکان‌پذیر است که گراف G از یک گراف K_8 و یک گراف K_4 تشکیل شده باشد. در این صورت داریم:

$$q(G) = q(K_8) + q(K_4) = \frac{8 \times 7}{2} + \frac{4 \times 3}{2} = 34$$

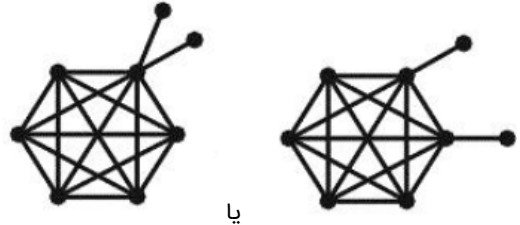
$$q(G) + q(\bar{G}) = \frac{P(P-1)}{2} \Rightarrow 34 + q(\bar{G}) = \frac{12 \times 11}{2}$$

$$\Rightarrow q(\bar{G}) = 66 - 34 = 32$$

دو یال مجاور، دو یالی در گراف هستند که در یک رأس مشترک باشند. بنابراین یال ad با یال‌هایی در گراف G مجاور است که به یکی از دو رأس a یا d متصل باشند. این یال‌ها با توجه به مجموعه همسایه‌های باز رؤس a و d عبارت‌اند از:

df, de, dc, af, ab

می‌دانیم که بیش‌ترین اندازه در گراف از مرتبه‌ی p با توجه به نابرابری $0 \leq q \leq \frac{p(p-1)}{2}$ برابر است با $\frac{p(p-1)}{2} = \binom{p}{2}$ که در گراف‌های کامل K_p پدید می‌آید. برای اینکه تعداد رأس‌های با درجه‌ی کمتر، بیش‌تر شود سعی می‌کنیم یک گراف کامل که اندازه‌ی آن بیش‌ترین نزدیکی را به تعداد ثابت یال‌ها داشته باشد ایجاد کنیم و سپس تکلیف رأس‌های باقی‌مانده را روشن می‌نماییم. در اینجا، بهتر است یک گراف K_6 که تعداد یال‌هایش $\frac{6(6-1)}{2} = 15$ است ایجاد کنیم و سپس دو رأس باقی‌مانده را به یکی از دو شکل زیر، از درجه‌ی یک رسم نماییم:



یا

تعداد گراف‌هایی با ۵ رأس و ۴ یال که می‌توانیم رسم کنیم و ویژگی مورد نظر را داشته باشند، برابر ۳ است که در زیر رسم شده‌اند:



در واقع، کافی است مجموعه‌ی ۵ نقطه‌ای رأس‌ها را به دو زیرمجموعه‌ی ۲ و ۳ رأس یا ۱ و ۴ رأسی افزایش کنیم و گراف‌های ممکن را رسم نماییم. نکته‌ی مهم: اگر رأس‌های گراف را نامگذاری می‌کردیم، تعداد گراف‌ها فرق می‌کرد زیرا مسئله‌ی جایگشت پیش می‌آمد.

این گراف نمی‌تواند ۶ رأس درجه ۱ داشته باشد، چون در این صورت مطابق شکل (۱) دارای ۳ یال خواهد بود که مخالف فرض است. در صورتی که گراف را مطابق شکل (۲) رسم کنیم، مشاهده می‌کنیم که گراف موردنظر می‌تواند حداکثر دارای ۵ رأس از درجه ۱ باشد.

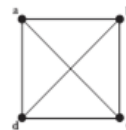


شکل (۱)

شکل (۲)

در گراف K_4 ، زیرگراف‌های با اندازه ۲ را می‌توان به دو دسته تقسیم کرد:

الف) زیرگراف‌های از مرتبه ۴: در این حالت کافی است از میان ۶ یال گراف، ۲ یال را انتخاب نماییم. در نتیجه تعداد این زیرگراف‌ها برابر است با: $\binom{6}{2} = 15$



ب) زیرگراف‌های از مرتبه ۳: در این حالت، ابتدا باید ۳ رأس از میان ۴ رأس گراف را انتخاب نمود. به عنوان مثال اگر سه رأس a, b, c و d انتخاب شوند، آنگاه برای داشتن زیرگرافی با اندازه ۲، کافی است ۲ یال را از میان ۳ یال موجود انتخاب نمود.

$$\binom{4}{3} \times \binom{3}{2} = 12$$

انتخاب ۳ رأس انتخاب ۲ یال



پس تعداد کل زیرگراف‌های مورد نظر برابر است با: $15 + 12 = 27$

مرتبه دو گراف G و \bar{G} برابر یکدیگر است، پس $p(\bar{G}) = 8$ است. از طرفی داریم:

$$q(G) + q(\bar{G}) = \frac{p(p-1)}{2} \Rightarrow 16 + q(\bar{G}) = \frac{8 \times 7}{2} \Rightarrow q(\bar{G}) = 12$$

$$q(\bar{G}) - p(\bar{G}) = 12 - 8 = 4$$

می‌دانیم گراف فرد - منتظم از مرتبه فرد وجود ندارد. از طرفی گراف ۶-منتظم از مرتبه ۷، همان گراف کامل K_7 است، پس بیشترین تعداد یال‌های یک گراف منتظم غیرکامل از مرتبه ۷، مربوط به گراف ۴-منتظم است. در این گراف، درجه همگی رأس‌ها برابر ۴ است، پس داریم:

$$2q = 7 \times 4 = 28 \Rightarrow q = 14$$

سوال ۲۳

گزینه درست: null

$$V(G) = \{a, b, c, d, e, f\} \quad E(G) = \{ab, ac, bc, bd, cd, ce, de\} \quad (\text{آ})$$

$$d_G(a) + d_{\bar{G}}(a) = p - 1 \xrightarrow{p=6} 2 + d_{\bar{G}}(a) = 5 \Rightarrow d_{\bar{G}}(a) = 3 \quad (\text{ب})$$

$$N_G[d] = N_G(d) \cup \{d\} = \{b, c, d, e\} \quad (\text{پ})$$

$$edcb, ecdb, ecab \quad (\text{ت})$$

$$bcedb, bdcab \quad (\text{ث})$$

اشتباهات متداول:

۱- عدم دقت به رأس تنهای f که در این صورت مرتبه G را برابر $p = 5$ در نظر می گیرید.

۲- عدم اضافه کردن (اجتماع) مجموعه $\{d\}$ در به دست آوردن $N_G[d]$.

۳- محل برخورد دو یال bd و ac نقطه رأس نیست.

سوال ۲۴

گزینه درست: null

بین هر دو رأس متمایز یک گراف 2 -منتظم همبند از مرتبه n (گراف C_n) دقیقاً دو مسیر وجود دارد.

$$2 \binom{n}{2} = 2 \frac{n(n-1)}{2} = n^2 - n$$

از طرفی گراف C_n دارای n مسیر به طول صفر است (از هر رأس به خودش، مسیری به طول صفر وجود دارد)، بنابراین داریم:

$$n^2 - n + n = n^2 = \text{تعداد کل مسیرها}$$

سوال ۲۵

گزینه درست: null

طبق داده های سوال می توانیم بنویسیم:

$$\begin{cases} 3p = 2q \Rightarrow q = \frac{3}{2}p \\ q = 5p - 21 \end{cases} \Rightarrow \frac{3}{2}p = 5p - 21$$

$$\Rightarrow 3p = 10p - 42 \Rightarrow p = 6$$

$$q = 9 \Rightarrow p + q = 15$$

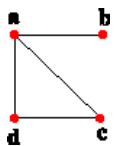
سوال ۲۶

گزینه درست: null

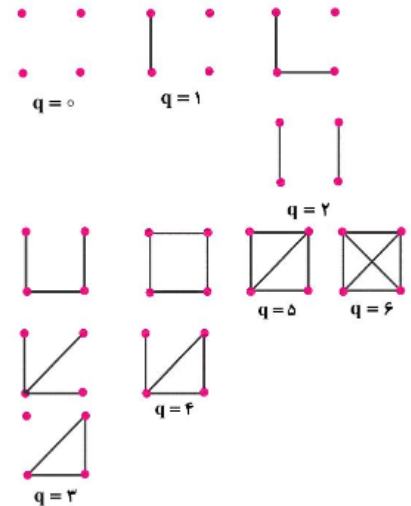
با توجه به مفهوم همسایگی بسته دو رأس، رأس های a و b در این گراف مجاور یکدیگرند. همچنین رأس های a و c مجاور یکدیگر بوده و هر دو با رأس d نیز مجاورند. از طرفی رأس b نمی تواند با رئوس c و d مجاور باشد، چون در صورت مجاور بودن b با c یا d ، هر یک از این دو رأس به اشتراک همسایگی های بسته رأس های a و b تعلق خواهند داشت که خلاف فرض سؤال است.

بنابراین گراف G به صورت مقابل است و داریم:

$$N_G[b] \cap N_G[d] = \{a\}$$



حالت‌های مختلف را رسم می‌کنیم.



فرض کنید v رأسی از گراف G و p مرتبه گراف باشد. در این صورت داریم:

$$d_G(v) + d_{\bar{G}}(v) = p - 1$$

در گراف ۳-منتظم G ، درجه همه رئوس برابر ۳ است، پس خواهیم داشت:

$$3 + d_{\bar{G}}(v) = 12 - 1 \Rightarrow d_{\bar{G}}(v) = 8$$

یعنی درجه تمام رئوس گراف \bar{G} ، برابر ۸ است، پس گراف \bar{G} یک گراف ۸-منتظم از مرتبه ۱۲ است.

تعداد مسیرهای از رأس a به رأس b در گراف K_6 با مجموعه رئوس $V = \{a, b, c, d, e, f\}$ که از رأس e عبور نکنند، معادل تعداد مسیرهای از رأس a به رأس b در گراف K_5 با مجموعه رئوس $V_1 = \{a, b, c, d, f\}$ است. داریم:

یک مسیر $a \rightarrow b$: مسیر به طول ۱

۳ مسیر $a \rightarrow \bigcirc \rightarrow b$: مسیر به طول ۲

۶ مسیر $a \rightarrow \bigcirc \rightarrow \bigcirc \rightarrow b$: مسیر به طول ۳

۶ مسیر $a \rightarrow \bigcirc \rightarrow \bigcirc \rightarrow \bigcirc \rightarrow b$: مسیر به طول ۴

بنابراین تعداد کل مسیرها برابر است با:

$$1 + 3 + 6 + 6 = 16$$

با توجه به رابطه $rp = ۲q$ در گراف‌های r -منتظم، در هر گراف ۲ -منتظم، $p = q$ است. از طرفی مجموع تعداد یال‌های یک گراف و مکمل آن، برابر تعداد یال‌های گراف کامل هم‌مرتبه آن است، پس داریم:

$$q(G) + q(\bar{G}) = \frac{p(p-1)}{۲} \Rightarrow p + (p+۳) = \frac{p(p-1)}{۲}$$

$$\Rightarrow ۲p + ۳ = \frac{p(p-1)}{۲} \Rightarrow ۴p + ۶ = p^2 - p \Rightarrow p^2 - ۵p - ۶ = ۰$$

$$\Rightarrow (p-۶)(p+۱) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} p=۶ \\ p=-۱ \text{ غ ق} \end{cases}$$

به گرافی که درجه تمامی رئوس آن برابر باشد، گراف منتظم گفته می‌شود. در هر گراف r -منتظم، رابطه $rp = ۲q$ برقرار است. (۲ همان درجه هر راس است)

داریم:

$$rp = ۲q \rightarrow rp = ۲ \times ۱۶$$

$$\rightarrow rp = ۳۲ = ۱ \times ۳۲ = ۲ \times ۱۶ = ۴ \times ۸$$

با توجه به آن که $r < p$ است، تنها دو مقدار زوج ۲ و ۴ برای ۲ وجود دارد.

تعداد یال‌های گراف $K_۴$ برابر ۶ است، پس در صورتی که تعداد یال‌های گراف G از مرتبه ۴ برابر صفر، ۱ یا ۲ باشد، آنگاه $q(G) < q(\bar{G})$ است. تعداد زیرگراف‌های مرتبه ۴ در این حالت برابر است با:

$$\binom{۶}{۰} + \binom{۶}{۱} + \binom{۶}{۲} = ۱ + ۶ + ۱۵ = ۲۲$$

دارای دو یال دارای یک یال بدون یال

تعداد یال‌های گراف $K_۳$ برابر ۳ است، پس در صورتی که تعداد یال‌های گراف G از مرتبه ۳ برابر صفر یا ۱ باشد، آنگاه $q(G) < q(\bar{G})$ است. تعداد زیرگراف‌های مرتبه ۳ در این حالت برابر است با:

$$\binom{۴}{۳} \times \left(\binom{۳}{۰} + \binom{۳}{۱} \right) = ۴(۱ + ۳) = ۱۶$$

انتخاب ۳ راس از ۴ راس بدون یال دارای یک یال

تعداد یال‌های گراف $K_۲$ برابر ۱ است، پس در صورتی که تعداد یال‌های گراف G از مرتبه ۲ برابر صفر باشد، آنگاه $q(G) < q(\bar{G})$ است. تعداد زیرگراف‌های مرتبه ۲ در این حالت برابر است با:

$$\binom{۴}{۲} \times \binom{۲}{۰} = ۶ \times ۱ = ۶$$

انتخاب ۲ راس از ۴ راس بدون یال

بنابراین تعداد زیرگراف‌های مورد نظر برابر است با:

$$۲۲ + ۱۶ + ۶ = ۴۴$$

گزینه درست: null

سوال ۳۳

در این سؤال چون اختلاف δ و Δ برابر با یک می‌باشد، پس درجه رئوس Δ یا δ است. پس اگر x رأس از درجه Δ باشد، آنگاه $v-x$ رأس از درجه δ وجود دارد و داریم:

$$\underbrace{\Delta, \Delta, \dots, \Delta}_x, \underbrace{\delta, \delta, \dots, \delta}_{v-x}$$

$$مجموع درجات رئوس گراف = 2q \Rightarrow x(\Delta) + (v-x)(\delta) = 2 \times 9$$

$$\Rightarrow x(\delta+1) + (v-x)(\delta) = 18$$

$$\Rightarrow x(\delta) + x + v(\delta) - x(\delta) = 18 \Rightarrow x + v\delta = 18$$

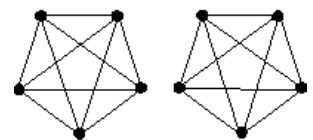
$$\Rightarrow \begin{cases} \delta = 1, x = 11 \text{ ق.ق. غ, (زیرا باید } x < v \text{ باشد)} \\ \delta = 2, x = 4 \end{cases}$$

گزینه درست: null

سوال ۳۴

یک گراف K_5 منتظم حداقل ۵ رأس دارد. برای این که گراف ناهمبند باشد باید حداقل از دو بخش جدا از هم تشکیل شده باشد، بنابراین یک گراف K_5 منتظم ناهمبند مطابق شکل زیر، باید حداقل شامل دو گراف K_5 باشد. در این صورت داریم:

$$q_{\min} = 2q(K_5) = 2\left(\frac{5 \times 4}{2}\right) = 20$$



گزینه درست: null

سوال ۳۵

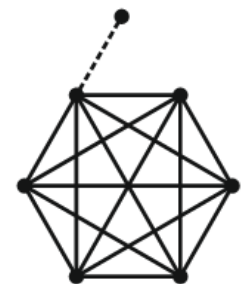
بیشترین اندازه‌ی گراف ناهمبند مرتبه‌ی P در حالتی است که یک رأس، منفرد بوده و $(p-1)$ رأس دیگر، گراف کامل تشکیل دهند. یعنی

$$.q = \frac{(p-1)(p-2)}{2}$$

گراف G یک یال بیشتر دارد. پس:

$$q_{\max} = \frac{(p-1)(p-2)}{2} + 1$$

$$= \frac{(7-1)(7-2)}{2} + 1 = 15 + 1 = 16$$



سوال ۳۶

گزینه درست: null

فرض کنید رأس a در گراف G از درجه $\Delta = 9$ باشد. در این صورت این رأس با تمام رئوس دیگر گراف مجاور است، یعنی حداقل درجه در این گراف $\delta = 1$ است.

اگر b رأسی از درجه ۱ در گراف G باشد، آنگاه داریم:

$$d_G(b) + d_{\bar{G}}(b) = p - 1 \Rightarrow 1 + d_{\bar{G}}(b) = 10 - 1 \Rightarrow d_{\bar{G}}(b) = 8$$

یعنی حداکثر درجه یک رأس در گراف \bar{G} ، برابر ۸ است.

تذکر: رأسی در گراف \bar{G} از درجه ماکزیمم (Δ) است که در گراف G از درجه مینیمم (δ) باشد.

سوال ۳۷

گزینه درست: null

الف) گراف منتظم

ب) گرافی است که بین هر دو رأس آن حداقل یک مسیر وجود دارد.

سوال ۳۸

گزینه درست: null

با توجه به اینکه گراف‌های G_1 و G_2 غیرتهی هستند و تعداد رأس‌های فرد هر گراف، عددی زوج است، بنابراین $k_1 = 2$ و $k_2 = 1$ است. در هر گراف k - منتظم از مرتبه p ، رابطه $2q = kp$ برقرار است، بنابراین داریم:

$$\left. \begin{aligned} q(G_1) &= \frac{2 \times 7}{2} = 7 \\ q(G_2) &= \frac{1 \times 8}{2} = 4 \end{aligned} \right\} \Rightarrow q(G_1) - q(G_2) = 3$$

سوال ۳۹

گزینه درست: null

$$q_{K_7} = \frac{7 \times 6}{2} = 21$$

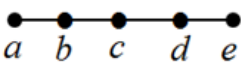
اگر گراف کامل باشد:

این گراف، ۳ یال از گراف کامل K_7 کمتر دارد که برای حداقل شدن δ باید هر سه یال را از یک رأس کم کنیم که در این صورت حداقل δ برابر ۳ خواهد شد. (دنباله‌ی درجات چنین گرافی به صورت ۳، ۵، ۵، ۶، ۶ و ۶ خواهد بود.)

سوال ۴۰

گزینه درست: null

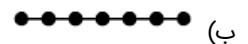
a,b,c,d , b,c,d,e



سوال ۴۱

گزینه درست: null

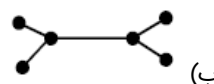
الف) گرافی که درجه تمام رئوس آن یا هم مساوی و برابر با عدد k باشد.



پ) بله

سوال ۴۲

گزینه درست: null



گزینه درست: null

سوال ۴۳

گزینه‌ی «۳»

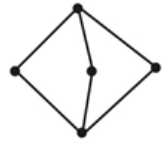
چون مرتبه‌ی گراف برابر ۵ است، پس درجه‌ی رئوس حداکثر ۴ است. از طرفی درایه‌های قطر اصلی A^2 همان درجه رأس‌های گراف هستند پس:

$$72 = 4 \times 3 \times 3 \times 2 \times 1$$

دنباله‌ی ۱, ۲, ۳, ۳, ۴ به دلیل داشتن سه رأس فرد، یک گراف نیست.

$$72 = 3 \times 3 \times 2 \times 2 \times 2$$

دو گراف متفاوت زیر، متناظر با دنباله‌ی ۲, ۲, ۳, ۳ قابل رسم است.



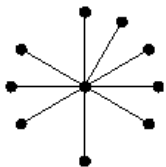
۲ رأس با درجه ۳ غیرمجاور باشند. ۲ رأس با درجه ۳ مجاور باشند.

چنانچه ملاحظه می‌شود در حالتی که ۲ رأس با درجه ماکزیمم مجاور نیستند، ۳ دور به طول ۴ داریم.

گزینه درست: null

سوال ۴۴

با توجه به ویژگی‌های مفروض، گراف به صورت زیر است:



در این گراف یک رأس با تمام رئوس دیگر مجاور است، پس $\gamma(G) = 1$ است.

گزینه درست: null


سوال ۴۵

ت) زوج

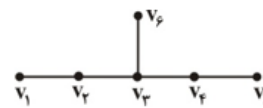
پ) مجاور

ب) طوقه

الف) رئوس

(آ) گراف P_6 با شکل  به عنوان یک مثال در نظر بگیرید. در این جا $\Delta = 2$.

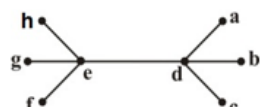
پس $\gamma(G) \geq \left\lceil \frac{6}{2+1} \right\rceil = 2$ و از طرفی $\{b, e\}$ یک مجموعه ی احاطه گر است، در نتیجه $\gamma(G) = 2$

(ب) گراف  به عنوان یک در نظر بگیرید.

در این جا $\Delta = 3$ و داریم: $\gamma(G) \geq \left\lceil \frac{6}{3+1} \right\rceil = 2$

این در صورتی است که $\{v_1, v_3, v_5\}$ یک مجموعه ی احاطه گر مینیمم است، یعنی $\gamma(G) = 3$ و $3 \neq 2$.

(پ) فرض کنیم $A = \{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ یک مجموعه ی احاطه گر غیرمینیمال باشد. پس یک یا چند عضو موجودند که با حذف آن مجموعه ی A مینیمال و احاطه گر باقی می ماند. اگر با حذف v_1 هم چنان A احاطه گر باقی بماند، v_1 را حذف می کنیم. اگر چنین نباشد، سراغ v_2 و رأس های دیگر می رویم و این کار را تا زمانی انجام می دهیم که یک مجموعه ی احاطه گر مینیمال به دست آوریم.

(ت) در گراف  مجموعه ی $\{e, d\}$ ، مجموعه ی احاطه گر یکتا با اندازه ۲ است.

در گراف کامل، هر رأس با تمام رئوس دیگر مجاور است، بنابراین با انتخاب هر ۳ رأس دلخواه از میان رئوس این گراف، یک مجموعه احاطه گر ۳ عضوی پدید می آید. داریم:

$$\binom{p}{3} = 20 \Rightarrow \frac{p!}{3!(p-3)!} = 20 \Rightarrow \frac{p(p-1)(p-2)}{6} = 20$$

$$\Rightarrow p(p-1)(p-2) = 120 = 6 \times 5 \times 4 \Rightarrow p = 6$$

از طرفی در یک گراف کامل، هر رأس به تنهایی قادر به احاطه تمام رئوس گراف است، پس مجموعه های احاطه گر مینیمال در گراف کامل، تنها یک عضو دارند و در نتیجه گراف K_6 دارای ۶ مجموعه احاطه گر مینیمال است.

بین هر دو رأس متمایز گراف P_n ، دقیقاً یک مسیر وجود دارد. بنابراین تعداد کل مسیرهای به طول غیرصفر در این گراف برابر $\binom{n}{1}$ است و در نتیجه داریم:

$$\binom{n}{2} = 28 \Rightarrow \frac{n(n-1)}{2} = 28 \Rightarrow n(n-1) = 56 = 8 \times 7 \Rightarrow n = 8$$

بنابراین گراف P_{n+3} ، همان گراف P_8 است. عدد احاطه گیری گراف P_n ، برابر $\left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil$ است، بنابراین عدد احاطه گیری گراف P_8 برابر است با:

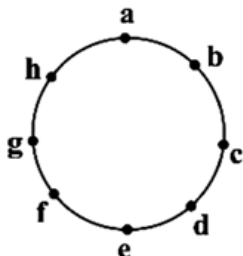
$$\left\lceil \frac{8}{3} \right\rceil = 3$$

به عنوان مثال در گراف شکل زیر (گراف P_8)، مجموعه $\{b, e, h, k\}$ یک مجموعه احاطه گر مینیمم است.



در گراف K_4 ، هر رأس با تمام رئوس دیگر مجاور است، پس هر زیر مجموعه دلخواه غیرتهی از مجموعه رئوس این گراف، یک مجموعه احاطه‌گر در گراف آن است. اگر $V = \{a, b, c, d\}$ مجموعه رئوس گراف K_4 باشد، آنگاه این مجموعه دارای $2^4 - 1 = 15$ زیر مجموعه غیرتهی است، پس ۱۵ مجموعه احاطه‌گر دارد.

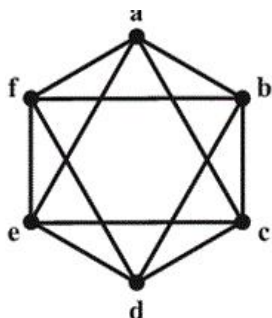
الف) رسم گراف $\{C_8\}$



ب) $D = \{a, d, g\}$

پ) $\{a, c, e, g\}$: یک مجموعه احاطه‌گر مینیمال

مکمل یک گراف ۴-منتظم از مرتبه ۶، گرافی ۱-منتظم از مرتبه ۶ است. چون تنها یک گراف ۱-منتظم از مرتبه ۶ وجود دارد، پس گراف ۴-منتظم از مرتبه ۶ نیز منحصر به فرد است.



چون هیچ رأسی در این گراف وجود ندارد که با تمامی رئوس دیگر مجاور باشد، پس عدد احاطه‌گری گراف بزرگ‌تر از یک است. از طرفی مجموعه $\{a, b\}$ یک مجموعه احاطه‌گر برای این گراف است، پس عدد احاطه‌گری گراف برابر ۲ است. به طور مشابه هر زیرمجموعه دو عضوی از رئوس این گراف، یک مجموعه احاطه‌گر مینیمم و در نتیجه مجموعه احاطه‌گر مینیمال است. دقت کنید که این گراف نمی‌تواند مجموعه احاطه‌گر مینیمالی با بیش از دو عضو داشته باشد (چون هر زیرمجموعه دو عضوی یک مجموعه احاطه‌گر مینیمم است)، پس تعداد مجموعه‌های احاطه‌گر مینیمال گراف برابر تعداد زیرمجموعه‌های دو عضوی مجموعه $V = \{a, b, c, d, e, f\}$ ، یعنی برابر $\binom{6}{2} = 15$ است.

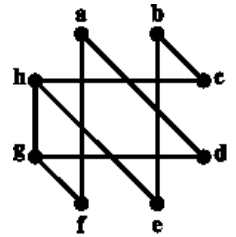
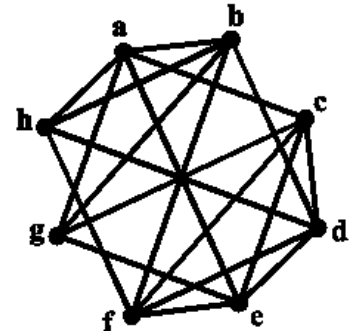
گراف C_n گرافی ۲-منتظم است که تنها از یک دور n رأسی تشکیل شده است، پس درجه هر رأس آن برابر ۲ می‌باشد. در صورتی عدد احاطه‌گری این گراف برابر یک خواهد بود که یکی از رأس‌های گراف با تمام رئوس دیگر مجاور باشد، یعنی گراف دارای رأسی از درجه $n-1$ باشد. بنابراین کافی است ۱۱ یال را به یکی از رأس‌های آن اضافه کنیم که در این صورت داریم:

$$n-1 = 2 + 11 = 13 \Rightarrow n = 14$$

گزینه درست: null

سوال ۵۳

گراف به صورت شکل زیر است:

در نتیجه مکمل گراف G ، یعنی گراف \bar{G} مطابق شکل زیر است:

در گراف \bar{G} رأسی وجود ندارد که با تمام رئوس دیگر مجاور باشد، پس عدد احاطه‌گری گراف \bar{G} بزرگتر از ۱ است. از طرفی مجموعه $\{a, d\}$ یک مجموعه احاطه‌گر برای این گراف است، پس $\gamma(\bar{G}) = 2$.

گزینه درست: null

سوال ۵۴

$$\delta(G) = 2 \Rightarrow \Delta(\bar{G}) = p - 1 - 2 = p - 3$$

بنابراین رأس درجه Δ در گراف \bar{G} ، $p - 2$ رأس گراف (شامل خود آن رأس و $p - 3$ رأس مجاور با آن) را احاطه می‌کند. حال اگر رأسی در گراف وجود داشته باشد که دو رأس باقی‌مانده را احاطه کند، $\gamma(\bar{G})$ برابر ۲ و در غیر این صورت برابر ۳ است.

گزینه درست: null

سوال ۵۵

در هر گراف 2 -منتظم، رابطه $2q = 3p$ برقرار است، بنابراین داریم:

$$3p = 2 \times 15 \Rightarrow p = 10$$

$$\left\lfloor \frac{p}{\Delta + 1} \right\rfloor \leq \gamma(G) \Rightarrow \left\lfloor \frac{10}{3 + 1} \right\rfloor \leq \gamma(G) \Rightarrow \gamma(G) \geq 3$$

بنابراین حداقل عدد احاطه‌گری این گراف، برابر ۳ است.

گزینه درست: null

سوال ۵۶

$$\delta(G) = 0, \Delta(G) = 3 \quad (\text{الف})$$

(ب) bcedb

(پ) bcde یا bdec یا bced یا bdce دو مورد هر کدام

$$N_G(f) = \{f\} = \{g\} \quad (\text{ت})$$

سوال ۵۷

گزینه درست: null

الف) eb, ec, bg

ب) ebcd یا ebgd

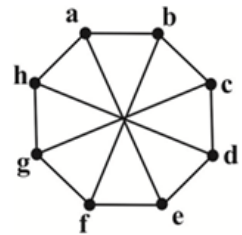
سوال ۵۸

گزینه درست: null

الف) در این گراف $\Delta = 3$ است، بنابراین:

$$\left\lfloor \frac{n}{\Delta + 1} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{8}{3 + 1} \right\rfloor = 2$$

ب)



سوال ۵۹

گزینه درست: null

الف) مرتبه

ب) مسیر

پ) $\frac{n(n-1)}{2}$

ت) دور

سوال ۶۰

گزینه درست: null

مرتبه دو گراف G و \bar{G} برابر یکدیگر است، بنابراین اگر مرتبه گراف \bar{G} را با n نمایش دهیم، $n = 18$ است. از طرفی رأسی که در گراف G دارای مینیمم درجه (δ) باشد، در گراف \bar{G} دارای ماکزیمم درجه (Δ) است. اگر این رأس را با v نمایش دهیم، داریم:

$$d_G(v) + d_{\bar{G}}(v) = n - 1 \Rightarrow \delta(G) + \Delta(\bar{G}) = n - 1$$

$$\Rightarrow 13 + \Delta(\bar{G}) = 18 - 1 \Rightarrow \Delta(\bar{G}) = 4$$

حداقل عدد احاطه‌گری گراف \bar{G} از رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$\gamma(\bar{G}) \geq \left\lfloor \frac{n}{\Delta + 1} \right\rfloor \Rightarrow \gamma(\bar{G}) \geq \left\lfloor \frac{18}{4 + 1} \right\rfloor = 4$$

پس با کم‌تر از ۴ رأس نمی‌توان گراف \bar{G} را احاطه کرد.

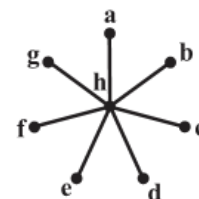
سوال ۶۱

گزینه درست: null

الف) $p = 6, q = 7$ ب) $N_G(b) = \{a, b, c\}$

ج) $\text{تعداد یال‌های گراف } G + \text{تعداد یال‌های گراف } \bar{G} = \frac{p(p-1)}{2}$

چون گراف دارای یک γ - مجموعه با اندازه یک است، پس قطعاً رأسی در گراف وجود دارد که با تمام رئوس دیگر گراف مجاور باشد. حال اگر هیچ دو رأس دیگری در گراف مجاور یکدیگر نباشند، آنگاه مطابق شکل، مجموعه $A = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ یک مجموعه احاطه‌گر مینیمال برای این گراف است، یعنی حداکثر تعداد اعضای چنین مجموعه‌ای برابر ۷ است.



چون عدد احاطه‌گری این گراف برابر ۲ است، پس هیچ رأسی از درجه ۶ ندارد و در نتیجه بیش‌ترین درجه در چنین گرافی $\Delta = 5$ است. چون گراف نمی‌تواند به تعداد فرد رأس از درجه فرد داشته باشد، کم‌ترین تعداد یال برای این گراف در صورتی ممکن است که درجه رئوس آن به صورت ۴، ۵، ۵، ۵، ۵، ۵ و ۵ باشد که در این حالت داریم:

$$2q = 6 \times 5 + 4 = 34 \Rightarrow q = 17$$

چون $\gamma(G) = 1$ ، پس یک رأس G همه رأس‌های دیگر را احاطه می‌کند و به همه آن‌ها متصل است، در نتیجه:

$$\Delta(G) = p - 1$$

کم‌ترین تعداد یال G زمانی اتفاق می‌افتد که از آن رأس مفروض در گراف G (که به همه رأس‌های دیگر متصل است) به همه رأس‌ها یالی رسم کنیم، ولی بین مابقی رئوس یالی وجود نداشته باشد.

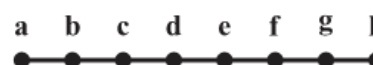


نمودار این گراف به شکل روبه‌رو می‌تواند باشد.

اشتباه متداول:

ممکن است چنین برداشت کنید که چون $\gamma(G) = 1$ ، پس هر کدام از رأس‌های G را که در نظر بگیریم، یک مجموعه احاطه‌گر است و به همه رأس‌های دیگر وصل است. در این صورت G را گراف کامل K_p فرض خواهید کرد، اما بنابر حل سؤال می‌بینید که چنین تصویری لزوماً درست نیست. G زمانی K_p است که دارای حداکثر تعداد یال باشد.

عدد احاطه‌گری گراف P_8 ، برابر $\left\lfloor \frac{8}{3} \right\rfloor = 3$ است.



مطابق شکل، مجموعه‌های احاطه‌گر مینیمم گراف P_8 عبارت‌اند از:

$$\{a, d, g\}, \{b, d, g\}, \{b, e, g\}, \{b, e, h\}$$

دقت کنید که در هر مجموعه احاطه‌گر مینیمم این گراف، یک رأس از میان a و b و یک رأس از میان g و h باید موجود باشد و بین هر دو رأس موجود در مجموعه احاطه‌گر مینیمم، حداکثر باید به اندازه دو رأس فاصله وجود داشته باشد.

سوال ۶۶

گزینه درست: null

الف) یک مجموعه احاطه گر را که با حذف هر یک از رئوس آن دیگر احاطه گر نباشد را احاطه گر مینیمال می‌نامیم.

ب) $D = \{h, b, i, a\}$

سوال ۶۷

گزینه درست: null

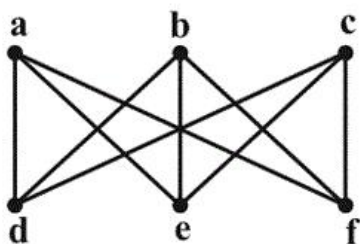
طبق قضیه داریم $\gamma \leq \left\lfloor \frac{1^0}{4+1} \right\rfloor = 2$ از طرفی مجموعه $D = \{e, j\}$ یک مجموعه احاطه گر است. لذا $\gamma(G) \leq 2$ بنابراین $\gamma(G) = 2$

سوال ۶۸

گزینه درست: null

اگر مجموعه همسایگی باز دو رأس در یک گراف یکسان باشد، آنگاه آن دو رأس قطعاً مجاور نیستند.

با توجه به داده‌های سؤال، گراف G متناظر با شکل زیر است:

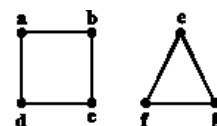


هریک از رأس‌های پایینی با تمام رئوس بالایی مجاور است و بالعکس، بنابراین با انتخاب یک رأس از مجموعه رئوس بالایی و یک رأس از مجموعه رئوس پایینی، تمام رئوس گراف احاطه می‌شوند، پس طبق اصل ضرب تعداد γ - مجموعه‌ها برابر است با: $3 \times 3 = 9$

سوال ۶۹

گزینه درست: null

گراف ۲-منتظم ناهمبند از مرتبه ۷ مطابق شکل زیر است:



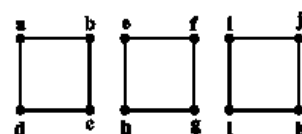
عدد احاطه‌گری این گراف برابر ۳ است و هر مجموعه احاطه‌گر مینیمم آن شامل دو رأس از مجموعه $\{a, b, c, d\}$ و یک رأس از مجموعه $\{e, f, g\}$ است. بنابراین تعداد مجموعه‌های احاطه‌گر مینیمم این گراف برابر است با:

$$\binom{4}{2} \times \binom{3}{1} = 6 \times 3 = 18$$

سوال ۷۰

گزینه درست: null

یک گراف ۲-منتظم از مرتبه ۱۲ به صورت ترکیبی از گراف‌های C_n قابل نمایش است. این گراف در صورتی دارای بزرگ‌ترین عدد احاطه‌گری ممکن است که مطابق شکل زیر ترکیبی از ۳ گراف C_4 باشد.



هر مجموعه احاطه‌گر مینیمم چنین گرافی باید شامل ۲ رأس از هر کدام از ۳ بخش گراف باشد، یعنی عدد احاطه‌گری این گراف برابر ۶ است. دقت کنید که به ازای حالت‌های دیگر ممکن برای گراف ۲-منتظم مرتبه ۱۲، عدد احاطه‌گری گراف ۴ یا ۵ است.

سوال ۷۱

گزینه درست: null

در گراف K_7 ، هر رأس با تمام رؤوس دیگر گراف مجاور است، پس هر مجموعه تک عضوی شامل یکی از رأس‌های گراف، یک مجموعه احاطه‌گر برای گراف است و در نتیجه گراف K_7 نمی‌تواند مجموعه احاطه‌گر مینیمال دو عضوی داشته باشد.

سوال ۷۲

گزینه درست: null

(آ) مجموعه $\{a, b, d, e, h\}$ یک مجموعه احاطه‌گر مینیمال ۵ عضوی است.

زیرا با حذف هر یک از اعضای این مجموعه، مجموعه باقی مانده احاطه‌گر نخواهد بود.

(ب) مجموعه $\{c, f, g\}$ یک مجموعه احاطه‌گر مینیمم است.

زیرا برای احاطه a و b حتما باید c حضور داشته باشد و برای احاطه e نیز چاره‌ای جز حضور f نیست.

اما هیچ کدام از دو رأس c و f نمی‌تواند هم زمان ۲ رأس از رأس‌های e ، b و g را احاطه کند و g بدون احاطه باقی می‌ماند. پس مجموعه $\{c, f, g\} \cup \{g\} = \{c, f, g\}$ احاطه‌گر مینیمم است.

راه حل دوم:

چون $\gamma(G) \geq \left\lceil \frac{9}{5+1} \right\rceil = 2$ پس حداقل ۲ رأس برای احاطه همه رأس‌ها لازم است. برای احاطه a و b باید c و برای احاطه e باید f حضور داشته باشند. اما هیچ کدام از رأس‌های c و f ، همزمان نمی‌تواند دو رأس از ۳ رأس e ، b و g را احاطه کند و g بدون احاطه می‌ماند.

(پ) خیر! زیرا برای مثال مجموعه $\{c, e, h\}$ نیز یک γ -مجموعه (مجموعه احاطه‌گر مینیمم) است.

سوال ۷۳

گزینه درست: null

الف) m^2

ب) نسبت به هم اول

پ) مینیمال

ت) ۲۱